

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Гимадиев Владислав Александрович



Выпускная квалификационная работа

Численное моделирование гиперзвукового обтекания сферы
воздухом

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.03 "Математика и механика"

Основная образовательная программа СВ.5008. "Механика и
математическое моделирование"

Профиль "Механика жидкости, газа и плазмы"

Научный руководитель:

Доцент,

кафедра гидроаэромеханики

СПбГУ, к. ф.-м. н., Карпенко А.Г.



Рецензент:

Старший преподаватель, кафедра
общей физики СПбГУ, к. ф.-м. н.,
доцент, Хоронжук Р.С

Санкт-Петербург
2021

Saint Petersburg State University

Gimadiev Vladislav Alexandrovich



Final qualifying work

Numerical simulation of hypersonic air flow around sphere

Level of education: bachelor

Field of education 01.03.03 "Mathematics and Mechanics"

Main educational program CB.5008.2017 "Mechanics and mathematical modeling"

Area of specialization "Mechanics of fluid, gas, and plasma"

Scientific supervisor:

Associate professor

of the department of Hydroaeromechanics

SPbU, PhD, Karpenko A.G.



Reviewer:

Associate professor, of the

department of General Physics SPbU,

PhD, Khoronzhuk, R.S.

Saint Petersburg

2021

1 Введение

Основными особенностями гиперзвуковых течений является значительный рост температуры за фронтом головной ударной волны, сильное торможение потока внутри ударного слоя и аэродинамический нагрев поверхности. Сложность явлений, сопровождающих полет гиперзвуковых летательных аппаратов, практически исключает возможность полного моделирования условий натурного обтекания в ударных трубах, в связи с чем методы математического моделирования приобретают важной значение. Численное моделирование гиперзвуковых течений связано с использованием сложной математической модели, включающей уравнения, описывающие пространственное течение вязкого сжимаемого газа, уравнения модели турбулентности, уравнения состояния, уравнения химической кинетики.

В данной работе обсуждается построение и реализация математической модели, предназначенной для численного моделирования гиперзвукового обтекания сферы с учетом неравновесных физико-химических процессов, протекающих в высокотемпературном воздухе. Основной целью работы является построение графика зависимости безразмерной толщины ударного слоя от числа Маха на основе данных, полученных в результате численного расчета, и сравнение данного результата с экспериментом [2].

1.1 Постановка задачи

Сфера с диаметром 1,27 см обтекается гиперзвуковым потоком. В рамках дипломной работы стоит задача рассмотреть данный процесс при числах Маха от 8 до 20 с шагом 0,5. Статическое давление на входе считаем равным 666,61 Па, статическая температура на входе равна 293 К. Концентрация двухатомного азота равна 76,7 %, концентрация двухатомного кислорода составляет 23,3 %.

Средняя длина свободного пробега молекул воздуха в условиях рассматриваемой задачи составляет (λ = м):

$$\lambda = \frac{K_b T}{\sqrt{2} \pi \sigma p} \approx 4,89 \cdot 10^{-1}$$

k_b - постоянная Больцмана, σ - эффективное сечение молекулы N_2 .

Число Кнудсена в данной задаче принимает значение:

$$Kn = \frac{\lambda}{d_{sph}} \approx 0,008$$

Так как $Kn \ll 1$ система уравнений Навье-Стокса применима для решения этой задачи.

Схема расчетной области приводится на Рис.1. Внешняя граница расчетной области удалена от сферы на 4 мм в точке торможения и на 8.65 мм в верхней точке. Задача решается в осесимметричной постановке. На входной границе задаются граничные условия сверхзвукового втекания в расчетную область, а на выходной границе — условия сверхзвукового вытекания. На стенке используются граничные условия прилипания, но для упрощения постановки выходного граничного условия в конце сферы небольшой участок стенки задается как не вязкая стенка с проскальзыванием. Поверхность сферы полагается теплоизолированной. Расчетная сетка состоит из $400 \times 400 = 160000$ гексагональных ячеек.

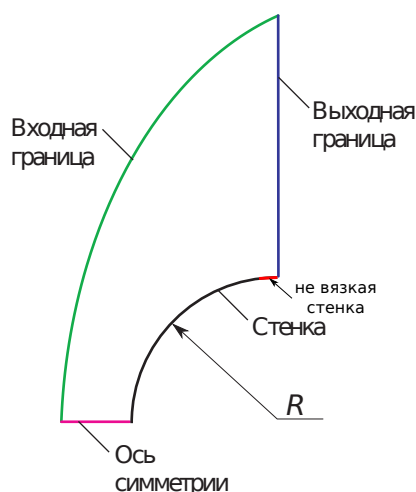


Рис. 1: Схема расчетной области

Для численного расчёта данной задачи будем использовать программный модуль Ansys Fluent.

2 Математическая модель многокомпонентного реагирующего газа

2.1 Выбор численного метода

Ansys Fluent предлагает выбрать один из двух численных методов.

1. Density-based solver(схема на основе метода Годуновского типа)
2. Pressure-based solver(схема на основе метода коррекции давлений)

Метод коррекции давлений был разработан для низкоскоростных несжимаемых потоков, в то время как метод Годунова в основном использовался для высокоскоростных сжимаемых потоков. Однако в последнее время оба метода были расширены и переформулированы для решения и работы в широком диапазоне условий потока, выходящих за рамки их традиционного или первоначального замысла.

Будем использовать density-based. Данный алгоритм решает уравнение неразрывности, уравнение сохранения импульса, а также уравнения энергии и уравнения переноса веществ.

2.2 Основные газодинамические уравнения

Нестационарное трехмерное течение вязкого сжимаемого газа описывается системой уравнений, которая в интегральной форме записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{U} dV + \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.1)$$

где \mathbf{U} — вектор-столбец консервативных переменных в точке x в момент времени t , \mathbf{F} — тензорное поле потока, V — некоторый замкнутый объем газа с границей ∂V , $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ — вектор элементарной площадки dS к границе объема ∂V с внешней нормалью \mathbf{n} . Вектор-столбец консервативных переменных и тензорное поле потока имеют вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \\ (\rho e + p) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

Полная энергия единицы массы равняется сумме внутренней энергии, обусловленной термодинамическими процессами (включает в себя энергии поступательного движения, вращательного, колебательного и

электронного возбуждения атомных и молекулярных компонент газовой смеси), и кинетической энергии

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \quad (1.2)$$

где t - время, ρ - плотность, \mathbf{v} - вектор скорости с компонентами v_x , v_y , v_z в координатных направлениях x , y , z .

\mathbf{I} - единичный тензор, $\boldsymbol{\tau}$ - тензор вязких напряжений, компоненты которого определяются равенством:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (1.3)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Вектор потока тепла \mathbf{q} определяется законом теплопроводности Фурье:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (1.4)$$

здесь λ - коэффициент теплопроводности, T - температура.

При решении задачи взаимодействия высокотемпературного воздуха с поверхностью тела необходимы такие характеристики среды как вязкость и теплопроводность. Для термически совершенного газа вязкость и теплопроводность практически не зависят от давления и являются функциями только температуры. В высокотемпературном воздухе, когда становятся заметными процессы диссоциации и ионизации, зависимости этих характеристик от параметров среды усложняются, в частности, начинает играть роль зависимость от давления (как следствие изменения молекулярного состава).

В нашей модели воздух рассматривается как многокомпонентный газ, состоящий из n компонентов. Парциальная плотность компонента i воздуха находится из уравнения состояния:

$$\rho_i = \frac{p_i}{R_i T}$$

где p_i — парциальное давление компоненты i , R_i — газовая постоянная компонента i в составе смеси. Газовая компонента определяется соотношением $R_i = \frac{R_0}{M_i}$, где R_0 — универсальная газовая постоянная, M_i — молярная масса компонента i . Плотность смеси находится из уравнения состояния:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

где p — давление смеси, M — мольная масса смеси. Давление смеси находится из закона Дальтона

$$p = \sum_{i=1}^n p_i$$

Мольная масса смеси находится из соотношения:

$$M = \sum_{i=1}^n c_i M_i$$

где M_i — мольная масса компонента i , c_i — массовая концентрация компонента i в смеси ($c_i = \rho_i/\rho$).

Энтальпия смеси имеет вид:

$$h = \sum_{i=1}^n c_i h_i$$

Энтальпия компонента i смеси находится из соотношения:

$$h_i = \int_{T_1}^{T_2} C_{pi} dT$$

Удельная теплоемкость каждой компоненты i смеси задается в виде кусочно-линейной зависимости как функция температуры и давления. Средняя удельная теплоемкость газовой смеси вычисляется с использованием соотношения:

$$c = \sum_{i=1}^n c_i C_{pi}$$

где C_{pi} — удельная теплоемкость компонента i .

Вязкость и теплопроводность газовой смеси определяются по формулам:

$$\mu = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \mu_i}{\sum_{i=1}^n x_i \varphi_{ij}}, \lambda = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \lambda_i}{\sum_{j=1}^n x_{ij} \varphi_{ij}}$$

где x_i — мольная концентрация компонента i . Параметр φ_{ij} рассчитывался с использованием соотношения:

$$\varphi_{ij} = \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_{wj}}{M_w} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2 \left[8 \left(1 + \frac{M_{wi}}{M_{wj}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Вязкость каждого компонента вычисляется по формуле Сазерленда:

$$\mu_i = \mu_{0i} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$

где μ_{0i} — динамическая вязкость компонента i при температуре T_0 , S — эффективная температура (константа Сазерленда, $S = 110.4$ К). Для воздуха $\mu_0 = 1.76 \cdot 10^{-5}$ Па · с при $T_0 = 273.14$ К. Теплопроводность каждого компонента определяется с использованием соотношения из кинетической теории газов:

$$\lambda_i = \frac{15}{4} \frac{R_0}{M_i} \mu_i \left(\frac{4}{15} \frac{C_{pi} M_i}{R_0} + \frac{1}{3} \right)$$

2.3 Осреднение по Фавру

Согласно подходу Рейнольдса, мгновенные параметры турбулентного потока представляются в виде суммы среднего значения \bar{f} и пульсационной составляющей f' :

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.1)$$

Под осреднением понимаем осреднение по времени:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt \quad (2.2)$$

При этом интервал осреднения Δt принимается достаточно большим по сравнению с характерным периодом пульсационного поля и существенно малым по сравнению с периодом осредненного поля.

Данный классический подход бы предложен Рейнольдсом для течений несжимаемой жидкости, при турбулентном течении сжимаемого газа более предпочтительным является другой способ осреднения, при котором для плотности и давления газа применяется осреднение по Рейнольдсу, а для других параметров потока вводится их так называемое средневзвешенное значение. Указанный комбинированный метод осреднения, именуемый методом средневзвешенных параметров, иногда называют также осреднением по Фавру. [1]

Таким образом, произвольный параметр течения представляется в виде суммы средневзвешенного значения \tilde{f} и пульсационной составляющей f'' :

$$f = \tilde{f} + f'' \quad (2.3)$$

Средневзвешенные параметры течения определяются следующим образом:

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (2.4)$$

Прямая черта сверху обозначает осреднение по времени. Для плотности и давления сохраняется обычное представление. Очевидно, что для несжимаемой жидкости $\tilde{f} = \bar{f}$.

Проведя осреднение по Фавру к системе уравнений Навье-Стокса, получим следующую систему:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}[\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_i})] + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\overline{\rho v'_i v'_j}) \quad (2.6)$$

Для замыкания этой системы уравнений необходимо представление для компонент тензора рейнольдсовых напряжений $-\overline{\rho v'_i v'_j}$. Данная система в литературе часто встречается под названием FANS(англ. "Favre-averaged Navier-Stokes") по аналогии с названием уравнений Рейнольдса (англ. Reynolds-averaged Navier-Stokes или RANS).

2.4 Модель турбулентности Спаларта-Аллмараса

Понятие «модель турбулентности» подразумевает совокупность эмпирических и иных соотношений, в том числе дополнительных дифференциальных уравнений. Долгое время значительные усилия были направлены на поиск универсальной модели турбулентности, способной прогнозировать широкий спектр турбулентных течений. Имело место заблуждение, что для такой модели число уравнений должно быть максимальным. Однако увеличение числа уравнений с неизбежностью требует соответствующей, подчас трудно достижимой эмпирической информации, которая необходима для моделирования членов, входящих в уравнения для характеристик турбулентности. [4]

Для замыкания данной системы будем применять модель турбулентности Спаларта-Аллмараса. [5] Данная модель содержит одно уравнение для переноса модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$:

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dt} = P^\nu - D^\nu + \frac{1}{\sigma}[\nabla \cdot \{(\nu + \tilde{\nu})\nabla \tilde{\nu}\} + C_{b2}\{(\nabla \tilde{\nu}) \cdot (\nabla \tilde{\nu})\}] + f_{t1}\Delta u^2 \quad (3.1)$$

$\tilde{\nu}$ определяется через кинематическую турбулентную вязкость через соотношение:

$$\tilde{\nu} = \frac{v_t}{f_{\nu 1}} \quad (3.2)$$

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3}, \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (3.3)$$

где кинематическая вязкость ν связана с динамической вязкостью μ следующим соотношением:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.4)$$

Генерационный член P^ν и диссипативный член D^ν определяются следующими выражениями:

$$P^\nu = c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}_\nu \quad (3.5)$$

$$D^\nu = (c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{k^2}f_{t2})\left(\frac{\tilde{\nu}}{d_w}\right)^2 \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{S} = \Omega + f_{\nu 2} \frac{\tilde{\nu}}{(kd_w)^2}, f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}} \quad (3.7)$$

$$f_w = g\left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^3}\right)^{\frac{1}{6}}, g = r + c_{w2}(r^6 - r), r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}(kd_w)^2} \quad (3.8)$$

d_w - расстояние до стенки, $k = 0.41$ - постоянная Кармана, Ω - модуль тензора завихренности:

$$\Omega = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{\frac{1}{2}}, \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.9)$$

Функция f_{t2} отвечает за подавление "спонтанного" или "численного" ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое и определяется выражением:

$$f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp\{-C_{t4}\chi^2\} \quad (3.10)$$

Член $f_{t1}\Delta u^2$ в уравнении переноса турбулентной вязкости отвечает за инициирование ламинарно-турбулентного перехода в заданной точке.

Константы, определяющие модель имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{3}, c_{b1} = 0.1355, c_{b2} = 0.622, \\ c_{w1} &= \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, c_{w2} = 0.3, \\ c_{w3} &= 2, c_{\nu 1} = 7.1, c_{t3} = 1.2, c_{t4} = 0.5 \end{aligned} \quad (3.11)$$

2.5 Уравнение диффузий

Массовая концентрация каждого компонента смеси c_i рассчитывается с помощью решения уравнения диффузий, которые для i -го компонента принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_i) + \nabla(\rho \vec{v} c_i) = -\nabla \vec{J}_i + w_i, \quad i = 1 \dots N_k - 1, \quad (4.1)$$

где N_k - число компонент смеси, w_i - массовая скорость образования i -ой компоненты, \vec{J}_i - вектор диффузионного потока i -ой компоненты.

Для описания модели реагирующего газа используется $N_k - 1$ уравнений диффузий, к ним добавляется условие равенства единице суммы массовых концентраций:

$$\sum_{i=1}^{N_k} c_i = 1. \quad (4.2)$$

Уравнение состояния смеси газов записывается в следующем виде:

$$p = \rho \frac{R_0}{\mu_\Sigma} T, \quad (4.3)$$

где молекулярный вес смеси:

$$\mu_\Sigma = \left(\sum_i^{N_k} \frac{c_i}{\mu_i} \right)^{-1} = \sum_i^{N_k} C_i \mu_i. \quad (4.4)$$

Формула перевода массовой концентрации в мольную концентрацию C_i :

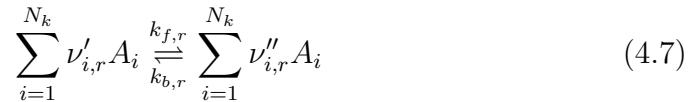
$$C_i = \mu_\Sigma \frac{c_i}{\mu_i}, \quad (4.5)$$

Вектор диффузионного потока i -ой компоненты вычисляется из закона Фика:

$$\vec{J}_i = -\rho D_{i,m} \nabla c_i, \quad (4.6)$$

где $D_{i,m}$ - коэффициент диффузии i -ой компоненты.

В общем виде реакцию r можно записать:



где $\nu'_{i,r}$ - стехиометрический коэффициент i -го реагента реакции r , $\nu''_{i,r}$ - стехиометрический коэффициент i -го продукта реакции r , A_i - символ

обозначающим i -ый компонент, $k_{f,r}$ - константа скорости прямой реакции, $k_{b,r}$ - константа скорости обратной реакции.

Массовая скорость образования i -ой компоненты w_i вычисляются с помощью соотношения, полученного согласно закону действующих масс. В соответствии с законом действующих масс скорость образования химического вещества пропорциональна произведению концентраций реагирующих компонент, причем каждая концентрация входит в произведение в степени, равной соответствующему стехиометрическому коэффициенту. [1]

Формула для вычисления w_i выглядит следующим образом:

$$w_i = \mu_i \sum_{r=1}^{N_R} \hat{w}_{i,r} \quad (4.8)$$

Суммирование происходит по реакциям в которых участвует i -ый компонент (N_R - количество данных реакций), μ_i - молекулярный вес i -го компонента, $\hat{w}_{i,r}$ - молярная скорость образования/распада i -ой компоненты в реакции r (размерность моль/(м³*с)).

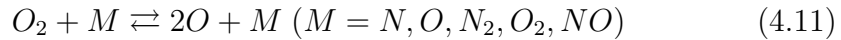
Для r -ой реакции молярная скорость образования/распада i -ой компоненты принимает вид:

$$\hat{w}_{i,r} = \Gamma_r (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r}) \left(k_{f,r} \prod_{j=1}^N C_j^{\nu'_{j,r}} - k_{b,r} \prod_{j=1}^N C_j^{\nu''_{j,r}} \right), \quad (4.9)$$

где Γ_r - коэффициент учета третьей частицы, который может быть отличным от единицы только в реакциях где участвует третья не реагирующая частица, например реакция диссоциации молекулы кислорода O_2 молекулой азота N_2 , которая не распадается:



Это позволяет вместо множества реакций типа:



записать всего одну (это допустимо так как в формуле Аррениуса для этих реакций будет различаться только предэкспоненциальный множитель), но ввести коэффициент эффективности третьей частицы в этой реакции $\gamma_{j,r}$:

$$\Gamma_r = \sum_{j=1}^{N_k} \gamma_{j,r} C_j. \quad (4.12)$$

В других же реакциях $\Gamma = 1$. Коэффициенты $\gamma_{j,r}$ для реакций диссоциации представлены в следующей таблице:

Реакция	O_2	N_2	NO	N	O
$O_2 + M \rightleftharpoons O + O + M$	1	1	1	5	5
$N_2 + M \rightleftharpoons N + N + M$	1	1	1	4.28	4.28
$NO + M \rightleftharpoons N + O + M$	1	1	22	22	22

Константа скорости прямой реакции $k_{f,r}$ вычисляется с помощью уравнения Аррениуса:

$$k_{f,r} = A_r T^{\beta_r} e^{-\frac{E_r}{RT}} \quad (4.13)$$

В уравнении A_r - предэкспоненциальный множитель (фактор частоты), β_r - температурный показатель, E_r - энергия активации, R - универсальная газовая постоянная.

Если реакция обратима, то константа скорости обратной реакции вычисляется с помощью константы скорости прямой реакции по формуле:

$$k_{b,r} = \frac{k_{f,r}}{K_r} \quad (4.14)$$

K_r - константа равновесия r -ой реакции.

Константа равновесия определяется следующим соотношением:

$$K_r = \exp\left(\frac{\Delta S_r^0}{R} - \frac{\Delta H_r^0}{RT}\right) \left(\frac{p_{atm}}{RT}\right)^{\sum_{i=1}^N (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r})} \quad (4.15)$$

p_{atm} - атмосферное давление.

Показатель экспоненты выражает изменение энергии Гиббса, где энтропийный и энтальпийный факторы определяются соответственно выражениями:

$$\frac{\Delta S_r^0}{R} = \sum_{i=1}^N (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r}) \frac{S_i^0}{R} \quad (4.16)$$

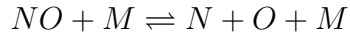
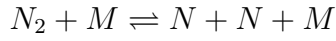
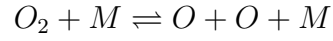
$$\frac{\Delta H_r^0}{RT} = \sum_{i=1}^N (\nu''_{i,r} - \nu'_{i,r}) \frac{h_i^0}{RT} \quad (4.17)$$

где S_i^0 и h_i^0 - энтропия стандартного состояния и энтальпия стандартного состояния соответственно.

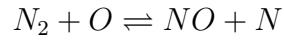
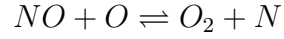
2.6 5-ти компонентный реагирующий воздух

В качестве газовой среды берется пятикомпонентный реагирующий воздух. В состав газовой смеси входят O_2 , N_2 , NO , N , O , модель учитывает 17 химических реакций. Данные реакции после ввода коэффициента учета третьей частицы могут быть представлены в виде:

Реакции диссоциации:



Реакции Зельдовича:



Константы входящие в уравнение Аррениуса описываются моделью Парка [3], представленной в следующей таблице:

Кинетическая модель Парка. $[A_r] = \text{моль}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$, $[\frac{E_r R}{k_B}] = \text{Дж}/\text{моль}$

№	Реакция	M	A_r	β_r	$E_r R/k_B$
1	$O_2 + M \rightleftharpoons O + O + M$	N, O	$1.0 \cdot 10^{22}$	-1,50	$4.938 \cdot 10^5$
		N_2, O_2, NO	$2.0 \cdot 10^{21}$	-1,50	$4.938 \cdot 10^5$
2	$N_2 + M \rightleftharpoons N + N + M$	N, O	$3.0 \cdot 10^{22}$	-1,60	$9.403 \cdot 10^5$
		N_2, O_2, NO	$7.0 \cdot 10^{21}$	-1,60	$9.403 \cdot 10^5$
3	$NO + M \rightleftharpoons N + O + M$	N, O, NO	$1.1 \cdot 10^{17}$	0	$6.277 \cdot 10^5$
		N_2, O_2	$5.0 \cdot 10^{15}$	0	$6.277 \cdot 10^5$
4	$NO + O \rightleftharpoons O_2 + N$		$8.4 \cdot 10^{12}$	0	$1.613 \cdot 10^5$
5	$N_2 + O \rightleftharpoons NO + N$		$6,4 \cdot 10^{17}$	-1,0	$3.190 \cdot 10^5$

3 Результаты и обсуждения

3.1 Результаты при значении $M = 12$

В данной работе представлены поля распределения скорости, температуры и плотности (Рис. 2, Рис. 3, Рис. 4), а также график зависимости давления от расстояния до поверхности сферы (Рис. 5) и поля распределения концентраций химических сортов (Рис. 6 - 10). Все эти результаты взяты для числа Маха 12.

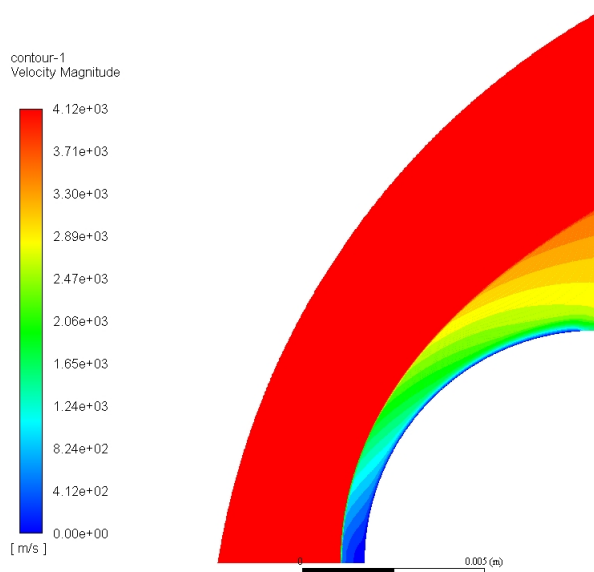


Рис. 2: Поле распределения скорости

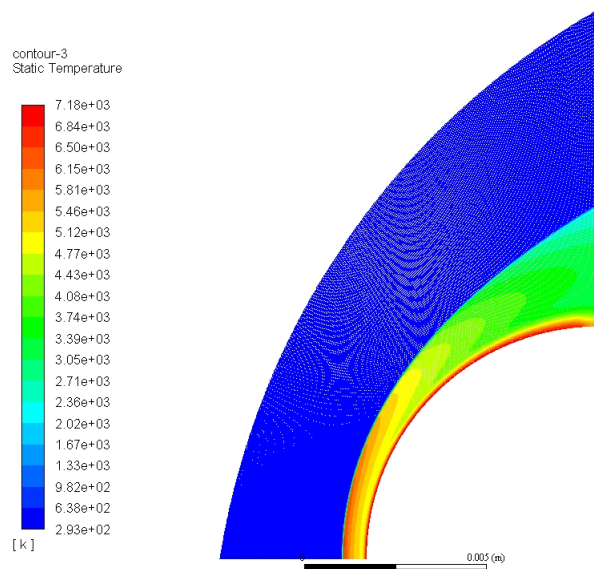


Рис. 3: Поле распределения температуры

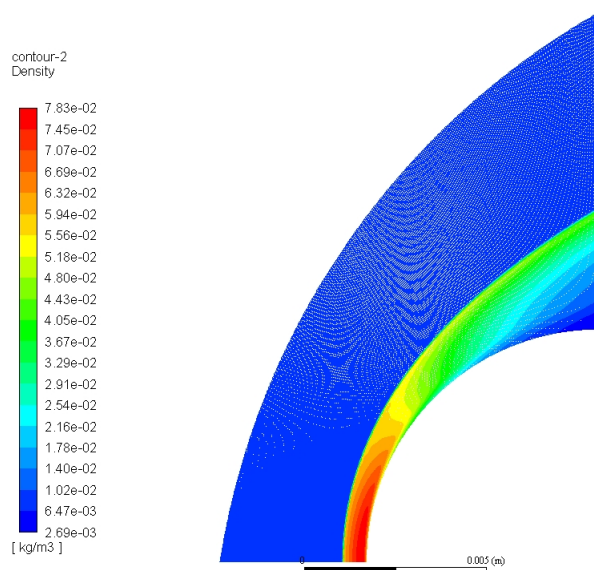


Рис. 4: Поле распределения плотности

На следующем графике можно заметить положение скачка уплотнения, так как наблюдаем резкое увеличение давления:

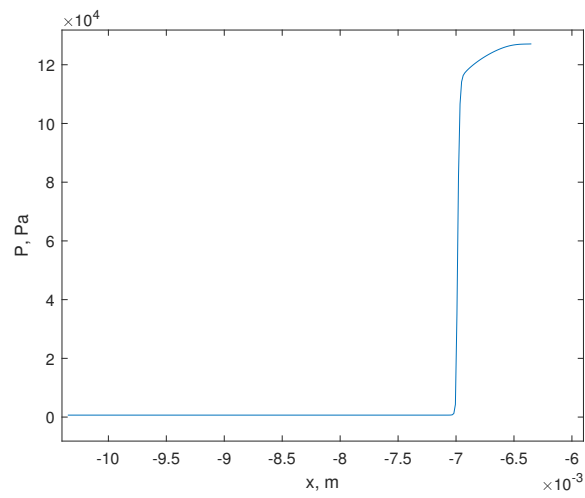


Рис. 5: График зависимости давления от расстояния до поверхности сферы

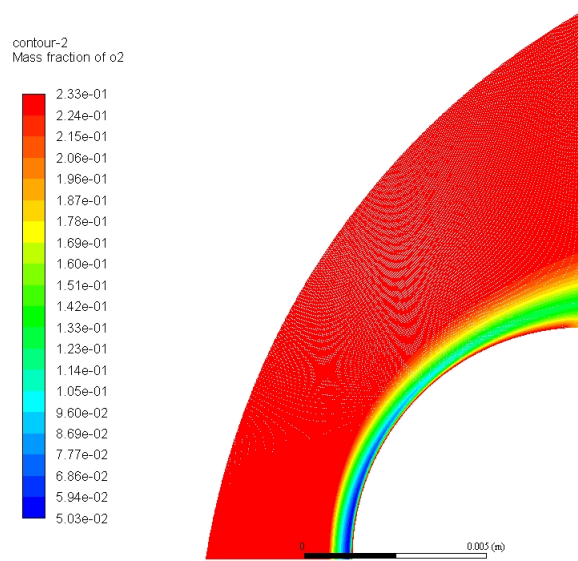


Рис. 6: Поле распределения концентраций O_2

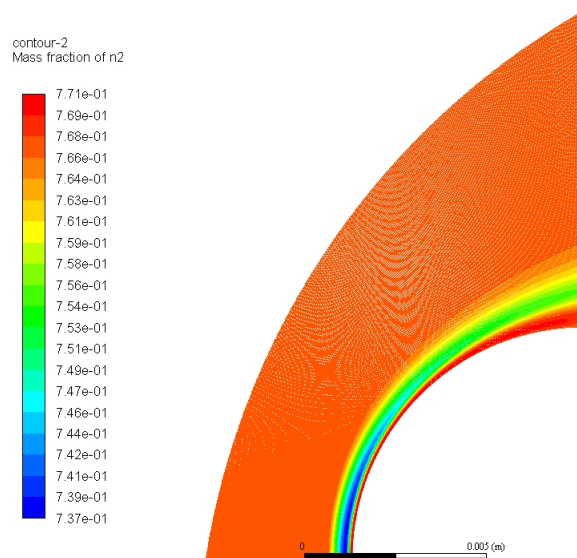


Рис. 7: Поле распределения концентраций N_2

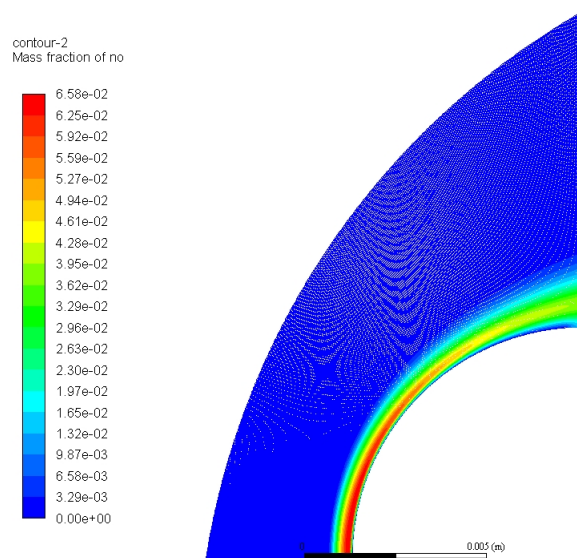


Рис. 8: Поле распределения концентраций NO

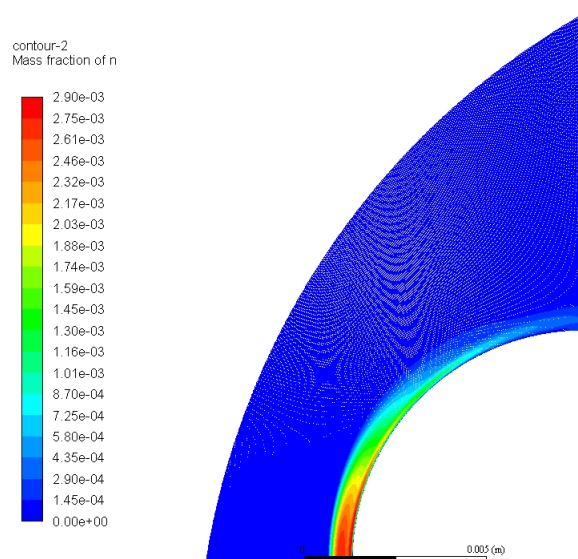


Рис. 9: Поле распределения концентраций N

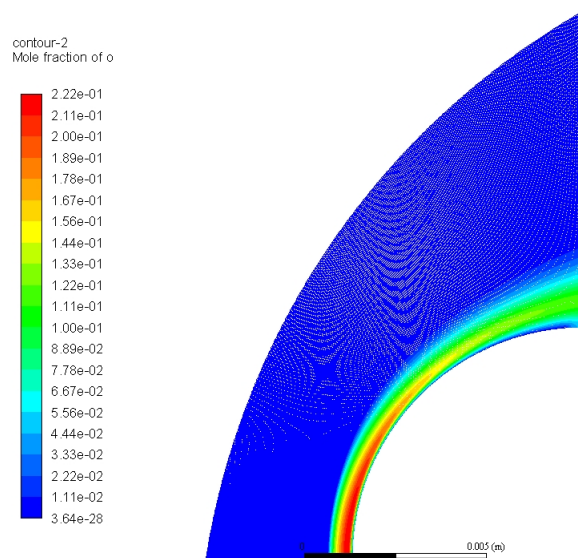


Рис. 10: Поле распределения концентраций O

3.2 Сравнение с экспериментальными данными и моделью совершенного газа

Отношение плотности до скачка уплотнения ρ_1 и после скачка уплотнения ρ_2 оказывает существенное влияние на толщину ударного слоя. Для модели совершенного газа безразмерная толщина ударного слоя может быть определена следующими соотношениями: [2]

$$\frac{\Delta}{D} = K \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2} \right)$$

здесь $K = 0.39-0.41$ - поправочный коэффициент, $\gamma = 1.4$ - показатель адиабаты.

Зависимость безразмерной толщины ударного слоя от числа Маха показывает Рис.6. Синяя линия соответствует зависимости безразмерного расстояния до ударной волны от числа Маха при использовании предположения о полностью равновесных химических реакциях (модель Крайко). [6] Зеленая линия показывает интерполированные экспериментальные данные из работы [2] с соответствующими оценками ошибок измерений. Красная линия соответствует результатам расчета при использовании модели нереагирующего совершенного газа с постоянным показателем адиабаты ($\gamma = 1.4$). Результаты расчетов для совершенного газа и модели Крайко взяты из статьи [7]. Результаты расчета с использованием однотемпературной модели обозначены на графике черной линией.

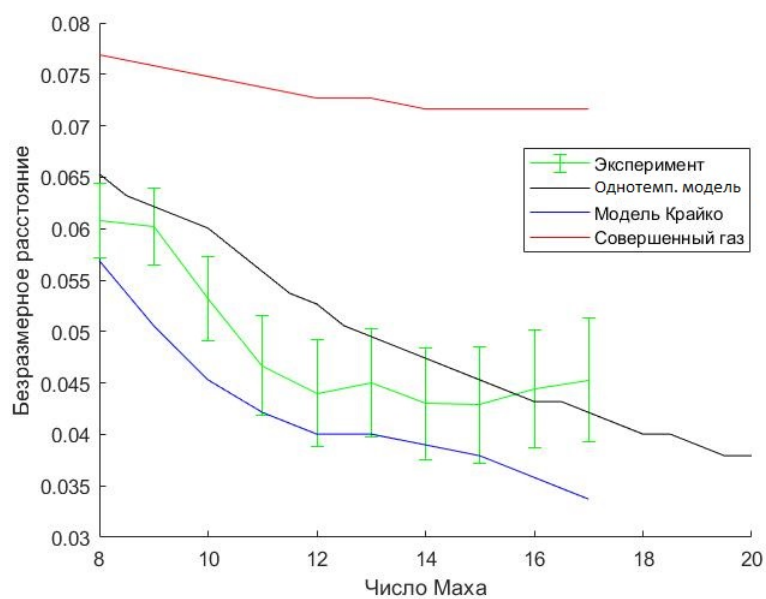


Рис. 11: Зависимость безразмерной толщины ударного слоя от числа Маха

На графике видно, что модель Крайко с учетом равновесной химической кинетики хорошо предсказывает расстояние от поверхности сферы до скачка уплотнения при высоких числах Маха. Это объясняется повышением температур при увеличении скорости.

4 Заключение

В данной работе был произведен расчет гиперзвукового обтекания сферы при числах Маха от 8 до 20 с шагом 0.5 с помощью программного комплекса Ansys Fluent. Была исследована математическая модель, включающая в себя уравнения течения вязкого сжимаемого газа, осредненные по Фавру, модель турбулентности Спаларта-Аллмареса, уравнение состояния и уравнения неравновесной химической кинетики. За газовую среду был взят пятикомпонентный реагирующий воздух N_2 , O_2 , NO , N , O , химические процессы описаны неравновесной однотемпературной моделью с кинетической схемой Парка.

На основе результатов были построены поля распределения газодинамических параметров течения, концентраций компонентов и график зависимости давления от расстояния до поверхности сферы при числе Маха 12. Главным результатом работы является график зависимости безразмерной толщины ударного слоя от числа Маха. На этом графике проведено сравнение результатов расчетов на основе нашей модели, результатов расчета этой задачи при модели совершенного нереагирующего газа, результатов при использовании модели равновесной химической кинетики Крайко [7], а также результатов эксперимента [2]. По этому графику видно, что наша модель дает хорошее совпадение итоговых результатов, а небольшие расхождения могут быть обусловлены простотой модели газовой среды.

5 Благодарности

Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра "Вычислительный центр СПб-ГУ" (<http://www.cc.spbu.ru/>).

Список литературы

1. Лалин Ю.В. Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей М.:// Наука, 1989. — 368 с.
2. Lobb R.K. Experimental measurement of shock detachment distance on spheres red in air at hypervelocities High Temperature Aspects of Hypersonic Flow. 1964. P. 519-527.
3. C. Park, J. Howe, R. Jaffe, G. Candler Review of Chemical-Kinetic Problems of Future NASA Missions, I: Earth Entries // Journal of Thermophysics and Heat transfer 7 (3), 385-398, 1993.
4. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие / И.А. Белов, С.А. Исаев, Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2001. 108 с.
5. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 1992-0439.
6. Крайко А. Н., Макаров В. Е. Явные аналитические формулы, определяющие равновесный состав и термодинамические функции воздуха для температур от 200 до 20000 К // ТВТ. — 1996.
7. V. Emelyanov, A. Karpenko, K. Volkov, Simulation of hypersonic flows with equilibrium chemical reactions on graphics processor units//Acta Astronautica 163 (2019) 259–271

Содержание

1	Введение	1
1.1	Постановка задачи	1
2	Математическая модель многокомпонентного реагирующего газа	3
2.1	Выбор численного метода	3
2.2	Основные газодинамические уравнения	3
2.3	Осреднение по Фавру	6
2.4	Модель турбулентности Спаларта-Аллмареса	7
2.5	Уравнение диффузий	9
2.6	5-ти компонентный реагирующий воздух	11
3	Результаты и обсуждения	13
3.1	Результаты при значении $M = 12$	13
3.2	Сравнение с экспериментальными данными и моделью совершенного газа	18
4	Заключение	20
5	Благодарности	21